Teoría Básica de Polinomios para Sistemas Lineales (VERSION 1) PS2315

Prof. José Ferrer
Departamento de Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolivar

Abril-Julio 2012

Abstract

En estas notas, con un estilo casi enciclopédico, se presentan los conceptos, resultados y métodos de la teoría general de polinomios que son de gran utilidad tanto en el análisis como en el diseño de sistemas de control. También se introducen los principales comandos de Scilab necearios para realizar las operaciones polinómicas mas importantes y frecuentemente empleados en el estudio de sistemas dinámicos, lineales e invariantes en el tiempo (tanto para sistemas de tiempo continuo como para los sistemas de tiempo discreto).

1 Polinomios y Funciones Racionales

En esta sección repasamos una serie de conceptos y resultados propios de la teoría de polinomios que son de utilidad en el modelaje, análisis y diseño de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Es probable que el estudiante ya ha tenido previamente contacto con el material presentado; sin embargo, es recomendable leerlo y dominarlo para garantizar al menos un vocabulario común.

La noción de que polinomio es "una expresión con muchos términos" no solo es imprecisa pero tambiém culpaple de que se pierda de vista las principales ideas relacionadas con polinomios. Sea F un cuerpo de números (ejemplo, R o C) y λ un símbolo abstracto. Otros símbolos o expesiones pueden generarse mediante la aplicación de las reglas estándares del álgebra. Si en esas manipulaciones con el símbolo λ y las cantidades o escalares en F solo se emplean las operaciones de suma, resta, multiplicación, todos los símbolos o expresiones obtenidas se denominan polinomios en λ sobre F.

Por lo tanto, $1.\lambda = \lambda$ es un polinomio en λ. Si $F = R$

$$f(\lambda) = \frac{1}{5}\lambda + \sqrt{2}\lambda^3$$

es un polinomio. Note que ni la operación de división o de raíz cuadrada se ha empleado en la construcción de $f(\lambda)$ ya que $\frac{1}{5}$ y $\sqrt{2}$ son números reales; solamente multiplicación y suma han sido utilizadas.

Es claro entonces que un polinomio es una expresión de la forma

$$\pi = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

en donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes pertenecientes a un cuerpo de números dado (en la teoria de sistemas de control generalmente es el cuerpo de números reales R), y $\lambda(s \text{ o } z)$ es un símbolo o letra, se denomina polinomio en λ $(s \text{ o } z)$. Las constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se dicen ser los coeficientes del polinomio π, mientras que los monomios

$$a_0\lambda^n, a_1\lambda^{n-1}, \ldots, a_n$$

se denominan los términos del polinomio. Si $a_0 \neq 0$, el polinomio es de grado n, y se escribe

$$n = grad(\pi) = \partial[\pi]$$

por definición

$$\partial[a] = \begin{cases} 1, & a \neq 0, \\ -\infty, & a = 0 \end{cases}$$

Al monomio $a_0\lambda^n$ se conoce como el término **líder** de π. Si $a_0 = 1$, se dice que el polinomio π es **mónico**.

EJEMPLO 1 *Considere los siguientes polinomios*

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 5\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - \pi \\ b(\lambda) &= \lambda^2 - 4 \end{aligned}$$

Entonces, $5\lambda^3$ *es el término líder de* $a(\lambda)$ *el cual es un polinomio de grado* 3 *y no es mónico. Por otro lado, ya que el coeficiente del término líder de* $b(\lambda)$ *es* 1, *se tiene que este polinomio es mónico.*

Dos polinomios se dicen ser iguales si son idénticos término a término; esto es, la igualdad

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n$$

implica

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_n = b_n$$

El resultado de sustituir la letra λ por un número a en el polinomio π, es un número llamado el valor de este polinomio para $\lambda = a$, y se denota por $\pi(a)$. Por lo tanto, para los polinomios

$$f(\lambda) = 3\lambda^3 - \lambda + 2, \quad g(\lambda) = 4\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda - 1$$

y

$$h(\lambda) = \sqrt{2}\lambda^3 - \left(3 + \sqrt{2}\right)\lambda + 4$$

Se tiene

$$f(-1) = 0, \quad g(j) = 3 + 3j, \quad h(1) = 1$$

En Scilab los polinomios en Scilab pueden representarse mediante el comando **poly(a,vname,"flag")** donde **a** es una matriz o un número real, **vname** es una secuencia de caracteres alfanuméricos que representa el nombre de una variable simbólica que de tener mas de cuatro caracteres solo se tomaran en cuenta los primeros cuatro, y finalmente **"flag"** es una cadena de simbolos del conjunto {**"roots"**,**"coeff "**} la cual esta por descarte en **"roots"**. Cuando **a** es una matriz la asignación **p=poly(a,"z")** genera el polinomio caracteristico de dicha matriz

$$p = \det(zI_n - a)$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión n (se supone que **a** es una matriz nxn)

EJEMPLO 2 *Suponga que*

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$p = \det(\lambda I_3 - a)$$

$$p = \det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) = \lambda^3 - \lambda^2 - 14\lambda + 24$$

Mientras que en Scilab se procede de la siguiente manera

```
-->a=[2 0 0; 0 3 0; 0 0 -4]
a =
 2. 0. 0.
 0. 3. 0.
 0. 0. - 4.
-->p=poly(a,"s")
 p =24-14s-s^2+s^3
```

Si **a** es un vector de dimensión $(1xn)$, entonces se tiene que: a) **poly(a,"z","roots")** generará un polinomio en la variable z de grado n y cuyas raices son las entradas del vector **a**, b) **poly(a,"s","coeff")** generará un polinomio en la variable λ de grado n cuyos coeficientes son las entradas del vector a siendo $a(1)$ el coeficiente constante; o sea,

$$a(1) + a(2)\lambda + a(3)\lambda^2 + ... + a(n)\lambda^{n-1}$$

tal como se ilustra a continuación.

EJEMPLO 3 *Considere*

−>a=[2 1 3]
a =
2. 1. 3.
−>h=poly(a,"s","roots")
h =
- 6 + 11s - 6s² + s³
−>g=poly(a,"z","coeff")
g =
2 + z + 3z ²

1.0.1 Operaciones con polinomios y funciones racionales

Al conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales en la variable λ, se denota por $R[\lambda]$. Sobre el conjunto $R[\lambda]$ se pueden defnir varias operaciones algebraicas internas que son de suma importancia en el estudio de senales y sistemas.

Dados dos polinomios $a, b \in R[\lambda]$ con grados n, m respectivamente y con expresiones

$$a(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i; \quad b(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} b_i\lambda^i$$

es posible realizar las siguientes operaciones algebraicas:

1. Suma de polinomios: Sea $w = \max\{n, m\}$, entonces el polinomio suma de $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$, es el polinomios $c(\lambda) = a(\lambda) + b(\lambda)$, definido por

$$c(\lambda) = \sum_{i=0}^{w} c_i\lambda^i$$

donde para $i \in \{0, 1, 2, \cdots, w\}$

$$c_i = a_i^* + b_i^*$$

$$a_i^* = \begin{cases} a_i, & i = 0, 1, \cdots, \min\{n, m\} \\ a_i\frac{(w-m)}{(n-m)}, & i = \min\{n, m\} + 1, \cdots, w \end{cases}$$

$$b_i^* = \begin{cases} b_i, & i = 0, 1, \cdots, \min\{n, m\} \\ b_i\frac{(w-n)}{(m-n)}, & i = \min\{n, m\} + 1, \cdots, w \end{cases}$$

2. Multiplicación de polinomios: El polinomio producto de $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$, es el polinomios , definido por

$$c(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j \lambda^{i+j}$$

Un resultado de importancia teórica en el caso de mutiplicación de polinomios es el siguiente: cuando dos polinomios $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$ diferentes de cero tienen como términos líderes $a_n\lambda^n$ y $b_m\lambda^m$ respectivamente, entonces el término leader de producto de estos dos polinomios será

$$a_n b_m \lambda^{n+m}$$

y el coeficiente leader $a_n b_m$ es diferente de cero: en consecuecia, $c(\lambda) = a(\lambda)\, b(\lambda)$ sera un polinomio no nulo. Este resultado puede expresarse en una manera equivalente: si

$$a(\lambda)\, b(\lambda) = 0$$

entonces $a(\lambda) = 0$ o $b(\lambda) = 0$.

A continuación se ilustra una manera de realizar estas operaciones en Scilab

EJEMPLO 4 ***–>a=[2 1 3]***

```
a =
2. 1. 3.
->h=poly(a,"z","roots")
 h =
 - 6 + 11z - 6z^2 + z^3
->g=poly(a,"z","coeff")
 g =
 2 + z + 3z^2
->h+g
 ans =
 - 4 + 12z - 3z^2 + z^3
->h*g
 ans =
 - 12 + 16z - 19z^2 + 29z^3 - 17z^4 + 3z^5
```

La divisíon de polinomios es una operación de fundamental importancia en el análisis y diseño de sistemas de control; en consecuencia, es fundamental manejar la terminología y métodos relacionados con dicha operación. Dados dos polinomios $a, b \in R[\lambda]$ con $b \neq 0$, es posible encontrar polinomios r y q tales que

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= q(\lambda)\, b(\lambda) + r(\lambda) \\ \operatorname{grad}(r) &< \operatorname{grad}(b) \end{aligned}$$

o expresado en otra forma mas familiar

$$\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{b(\lambda)}$$

donde a es el polinomio numerador o dividendo; b es el polinomio denominador o divisor, q es el polinomio cociente y r es el polinomio resto. Obviamente, si $\mathrm{grad}(a) < \mathrm{grad}(b)$, entonces $q = 0$ y $r = a$. En caso contrario, se puede substraer multiplos de $b(\lambda)$ desde $a(\lambda)$ tal que el grado de $a(\lambda)$ disminuya. El proceso terminará cuando $\mathrm{grad}(a) < \mathrm{grad}(b)$.

El proceso de división es necesario entenderlo ya que el método se utiliza frecuentemene en el diseño polinómico de controladores de dimensión finita. Suponga entonces

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ b(\lambda) &= b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \end{aligned}$$

con $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, y sin pérdida de generalidad, suponga que $n = \max\{n.m\}$. Seleccione la constante

$$\mu_0 = \frac{a_n}{b_m}$$

y construya el polinomio

$$a_1(\lambda) = a(\lambda) - \mu_0\lambda^{n-m}b(\lambda)$$

el cual puede ser cero o un polinomio con grado $n_1 < n$.

Siempre que $n_1 > m$, defina la constante

$$\mu_1 = \frac{coeffLead(a_1)}{b_m}$$

donde $coeffLead(a_1)$ representa el coeficiente leader de a_1, y construya el polinomio

$$a_2(\lambda) = a_1(\lambda) - \mu_1\lambda^{n_1-m}b(\lambda)$$

el cual, si no es identicamente igual a cero es un polinomio con grado $n_2 < n_1$. Si $n_2 \geq m$ el proceso puede repetirse. Ahora bien, los grados de los restos parciales $a_1(\lambda), a_2(\lambda), ...$ constituyen una secuencia finita decreciente tal que existera un primer resto parcial $a_{k+1}(\lambda)$ que es identicamente igual a cero o es de grado $n_{k+1} < m$. Eliminando los restos parciales $a_1(\lambda), a_2(\lambda), ...a_k(\lambda)$ de las relaciones

$$\begin{aligned} a(\lambda) - \mu_0\lambda^{n-m}b(\lambda) &= a_1(\lambda) \\ a_1(\lambda) - \mu_1\lambda^{n_1-m}b(\lambda) &= a_2(\lambda) \\ \vdots &= \vdots \\ a_k(\lambda) - \mu_k\lambda^{n_k-m}b(\lambda) &= a_{k+1}(\lambda) \end{aligned}$$

se obtiene la identidad

$$a(k) - q(\lambda)\, b(\lambda) = r(\lambda)$$

o sea

$$a(k) = q(\lambda)\, b(\lambda) + r(\lambda) \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \mu_0 \lambda^{n-m} + \mu_1 \lambda^{n_1-m} + \cdots + \mu_k \lambda^{n_k-m} \\ r(\lambda) &= a_{k+1}(\lambda) \text{ y } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(b) = m \end{aligned}$$

Para dividir polinomios en Scilab es posible usar el comando pdiv cuya secuencia de llamado es

$$[r, q] = \mathbf{pdiv}(a, b)$$

donde a es el polinomio dividendo, b es el polinomio divisor, r es el polinomio resto y q es el polinomio cociente.

EJEMPLO 5 *Considere la división de los polinomios*

$$\begin{aligned} a(s) &= s^8 + s^7 + 3s^4 - 1 \\ b(s) &= s^4 - 3s^3 + 4s + 1 \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo dado (el mismo aprendido en secundaria) se obtiene

$$\begin{aligned} q(s) &= s^4 + 4s^3 + 12s^2 + 32s + 82 \\ r(s) &= 194s^4 - 140s^2 - 360s - 83 \end{aligned}$$

y Usando Scilab:

```
-->v=[-1 0 0 0 3 0 0 1 1];
-->a=poly(v,"z","coeff");
-->z=poly(0,"z");
-->b=z^4-3*z^3+4*z+1;
-->[r,q]=pdiv(a,b)
q =
82 + 32z + 12z2 + 4z3 + z4
 r =
- 83 - 360z - 140z2 + 194z3
```

DEFINICION 6 *Cuando el polinomio resto resultante de una división de $a(\lambda)$ por $b(\lambda)$ es cero, o sea,*

$$a(\lambda) = q(\lambda)\, b(\lambda) \tag{2}$$

donde $q(\lambda)$ es un polinomio en $F[\lambda]$, se dice que $a(\lambda)$ es divisible por $b(\lambda)$ sobre $F[\lambda]$, o que $b(\lambda)$ es un divisor o factor de $a(\lambda)$. También se dice que 2 es una factorización de $a(\lambda)$ sobre $F[\lambda]$.

Sobre $R[\lambda]$, $\lambda+1$ y $\lambda-1$ dividen ambos a λ^2-1. Pero también $3\lambda+3$, ya que

$$\lambda^2-1=(3\lambda+3)\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{3}\right)$$

y ambos factores en la derecha se en encuentran en $R[\lambda]$.

Es evidente que ningún polinomio distinto de cero es divisible por un polinomio con mayor grado. Este hecho nos permite demostrar que los polinomios resto $r(\lambda)$ y cociente $q(\lambda)$ son únicos. Suponga que existen polinomios $q(\lambda), q_1(\lambda)$ y $r(\lambda), r_1(\lambda)$ tales que

$$\begin{aligned} a(k) &= b(\lambda)+r(\lambda) \\ a(k) &= q_1(\lambda)\, b(\lambda)+r_1(\lambda) \end{aligned}$$

donde $r(\lambda), r_1(\lambda)$ son polinomios ceros o $\operatorname{grad}(r), \operatorname{grad}(r_1) \leq \operatorname{grad}(b)$

Por lo tanto,

$$[q(\lambda)-q_1(\lambda)]\, b(\lambda)=r_1(\lambda)-r(\lambda)$$

y se deduce que $b(\lambda)$ divide al polinomio $r_1(\lambda)-r(\lambda)$ el cual es de grado menor que $m=\operatorname{grad}(b)$, pero esto es imposible al menos que $r_1(\lambda)-r(\lambda)=0$, y por lo tanto, $r_1(\lambda)=r(\lambda)$ y $q(\lambda)=q_1(\lambda)$.

En resumen, se ha demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 7 *Si $a(\lambda), b(\lambda)$ son polinomios con $b(\lambda)\neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(\lambda)$ y $r(\lambda)$ sobre F tales que*

$$a(k)=q(\lambda)\, b(\lambda)+r(\lambda)$$

donde $r(\lambda)=0$ o $\deg(r)<\deg(b)$. El polinomio $r(\lambda)$ se denomina polinomio resto de $a(\lambda)$ bajo la división de $b(\lambda)$, mientras que $q(\lambda)$ se le denomina el polinomio cociente resultante de la división de $a(\lambda)$ por $b(\lambda)$. -

LEMA 8 *Si dos polinomios $a(\lambda)$ y $a_1(\lambda)$ son ambos divisibles por $b(\lambda)\in R[\lambda]$, entonces para polinomios arbitrarios $l(\lambda), l_1(\lambda)\in R[\lambda]$, el polinomio*

$$l(\lambda)\, a(\lambda)+l_1(\lambda)\, a_1(\lambda)$$

es divisible por $b(\lambda)$.

DEMOSTRACION. *Por hipótesis, existen polinomios $q(\lambda), q_1(\lambda)$ tales que $a(\lambda)=q(\lambda)\, b(\lambda)$ y $a_1(\lambda)=q_1(\lambda)\, b(\lambda)$, por lo tanto,*

$$\begin{aligned} l(\lambda)\, a(\lambda)+l_1(\lambda)\, a_1(\lambda) &= [q(\lambda)\, b(\lambda)+l_1(\lambda)\, q_1(\lambda)\, b(\lambda)] \\ &= [l(\lambda)\, q(\lambda)+l_1(\lambda)\, q_1(\lambda)]\, b(\lambda) \end{aligned}$$

O sea, $b/(la+l_1a_1)$. ■

EJERCICIO 9 *Si $f(z), g(z)$ son polinomios en $F[z]$, encuentre condiciones necesarias y suficientes tales que f/g y g/f.*

EJERCICIO 10 *Exprese cada uno de los polinomios $h(s)$ en la forma*

$$h(s) = q(s)\,k(s) + r(s)$$

donde $F = R$.

1. $h(s) = s^4 + 4s^3 + 4s^2 - 7,\ k(s) = s^2 + 1;$
2. $h(s) = s^4 - 3s^2 + 5s + 6,\ k(s) = s - 2.$

1.1 Teorema del Resto

El polinomio resto $r(\lambda)$ resultado de la división de un polinomio $a(\lambda)$ por un binomio de la forma

$$b(\lambda) = (x - \alpha)$$

donde $\alpha \in C$ es fijo pero arbitrario, puede calcularse sin necesidad de realizar la división polinómica mediante el siguiente resultado cuya importancia no debe ser disminuida debido a su simplicidad.

TEOREMA 11 *El polinomio resto $b(\lambda)$ obtenido como resultado de la división del polinomio $a(\lambda)$ por el binomio $b(\lambda) = x - \alpha$, es igual al valor del polinomio $a(\lambda)$ en $\lambda = \alpha$, o sea, $r(\lambda) = a(\alpha)$.*

DEMOSTRACION. *Como consecuencia del algoritmo de división de polinomios se tiene que el polinomio resto resultante de dividir el polinomio $a(\lambda)$ por $(\lambda - \alpha)$ debe ser de grado cero (una constante); esto es, $r(\lambda) = \beta$. por lo tanto*

$$a(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \alpha) + \beta$$

Es evidente entonces que al evaluar $a(\lambda)$ en $\lambda = \alpha$ se obtiene

$$\begin{aligned} a(\lambda)|_{\lambda=\alpha} &= q(\alpha)(\alpha - \alpha) + \beta \\ &= \beta \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\beta = r(\lambda) = a(\alpha)$$

O sea,

$$a(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \alpha) + a(\alpha)$$

■

De inmediato se concluye que $a(\lambda)$ es divisible por $(\lambda-\alpha)$ si y solamente si $a(\alpha)=0$. En dicho caso, se dice que el binomio $(\lambda-\alpha)$ es un factor del polinomio $a(\lambda)$. Un elemento $\alpha\in C$ se dice ser una raiz del polinimio $a(\lambda)$ si

$$a(\lambda)|_{\lambda=\alpha}=0$$

Por lo que el teorema del resto nos dice que $(\lambda-\alpha)$ es un facor de $a(\lambda)$ si y solamente si α es una raiz de $a(\lambda)$.

EJEMPLO 12 *Demuestre que*

$$a(z)=3-5z+z^2+z^3$$

es divisible por $z+3$.

Usando Scilab:

```
->z=poly(0,"z");
–>a=3-5*z+z^2+z^3;
–>a3=horner(a,-3)
 a3 =
0.
```

TEOREMA 13 *Un polinomio* $a\in R[\lambda]$ *de grado* n *sobre el cuerpo* R *tiene a lo máximo* n *raices.*

DEMOSTRACION. *Se demotrará el teorema por indución sobre el grado* n *del polinomio* $a(\lambda)$. *Un polinomio de grado* 0 *consiste únicamente de una constante no nula y en consecuncia no tiene raices.Suponga que el teorema se cumple para todos los polinomios de grado* $n-1$ *y suponga que* $a(\lambda)$ *es un polinomio de grado* n. *Si* $a(\lambda)$ *no tiene raices sobre* R, *entonces se cumple el teorema. Por el contrario si* $a(\lambda)$ *tiene una raiz, denótela por* α. *Por el teorema del resto,* $a(\lambda)$ *se puede expresar como*

$$a(\lambda)=q(\lambda)(\lambda-\alpha)$$

y se tiene que $\operatorname{grad}(q)=n-1$. *Si para algún* $\beta\in R$ *se tiene que*

$$a(\beta)=q(\beta)(b-\alpha)=0$$

entonces se tiene que β *es una raíz de* $q(\lambda)$ *o* $\alpha=\beta$. *En consecuencia, cualquier raíz de* $a(\lambda)$ *es igual a* α *o es una raíz de* $q(\lambda)$. *pero por inducción* $q(\lambda)$ *tiene a lo sumo* $n-1$ *raices, y asi que* $a(\lambda)$ *tiene* n *raices máximo sobre* R. ■

Resumendo entonces, , existe un polinomio $q(\lambda)\in F(\lambda)$ tal que

$$a(\lambda)=q(\lambda)\,b(\lambda) \tag{3}$$

y se dice tambíen que (3) es una **factorización** de $a(\lambda)$ sobre F, lo que indica que los polinomios $q(\lambda)$ y $a(\lambda)$ son polinomios sobre F.

Si $F = R$, entonces $(\lambda + 1)$ y $(\lambda - 1)$ dividen ambos a $\lambda^2 - 1$, como también lo hace $\left(\frac{1}{5}\lambda - \frac{1}{5}\right)$ ya que

$$\lambda^2 - 1 = \left(\frac{1}{5}\lambda - \frac{1}{5}\right)(5\lambda + 5)$$

y ambos factores se encuentran en $R[\lambda]$.

Debe se evidente, si $b(\lambda)$ divide $a(\lambda)$ sobre F, entonces para cualquier constante $\alpha \neq 0$, $cb(\lambda)$ también divide $a(\lambda)$. Eso es evidente debido a

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= q(\lambda)\, b(\lambda) \\ &= c^{-1}q(\lambda)\,[cb(\lambda)] \end{aligned}$$

con $c^{-1}q(\lambda) \in F[\lambda]$. En particular,

$$a(\lambda) = c\left[c^{-1}a(\lambda)\right]$$

y en consecuencia, toda constante $c \in F - \{0\}$, divide todo polinomio $a(\lambda) \in F(\lambda)$. Una factorización de un polinomio en dos factores donde uno de ellos es una constante no nula, se denominar'a **factorización trivial**.

DEFINICION 14 *Un polinomio no constante $a(\lambda) \in F(\lambda)$, donde F es un cuerpo de números (R o C), se denomina irreducible sobre F, si todas sus factorizacíónes de dos términos son triviales.*

Las posibles factorizaciones de un polinomio $a(\lambda) \in F[\lambda]$ dependerá del cuerpo de números F. Por ejemplo, es reducible sobre R ya que

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

y ambos factores son polinomios en R. Sin embargo, el polinomio $a(\lambda) =$ es irreducible en R pero es factorizable en C debido a

$$\lambda^2 + 1 = \left(\lambda - \sqrt{-1}\right)\left(\lambda + \sqrt{-1}\right)$$

y ambos factores son polinomios en $C[\lambda]$. Por lo tanto, irreductibilidad de un polinomio en F es una propiedad de un polinomio que puede perderse cuando el polinomio se considera elemento de un cuerpo mas grande $F_s \supset F$.

1.2 Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.

Dos polinomios $a, b \in R[\lambda]$ pueden ser divisibles por un mismo tercer polinomio $c \in R[\lambda]$, y el cual se denomina divisor o factor común. Por ejemplo, los polinomios

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)\left(\lambda^2 + \lambda - 1\right) \\ b(\lambda) &= \lambda^6 + 2\lambda^5 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

tiene los siguientes divisores o factores comunes

$$(\lambda+1)\,, \quad (\lambda+2)$$
$$(\lambda+1)(\lambda+2)=\lambda^2+3\lambda+2$$

PROPOSICION 15 *Sean $a,b,c\in R[\lambda]$, entonces:*

1. *Si a/b y a/c, entonces $a/(b+c)$.*
2. *Si a/b, entonces a/br para cualquier $r\in R[\lambda]$.*
3. *Si a/b y b/c, entonces a/c.*

DEMOSTRACION. *Solo demostraremos (1). de acuerdo a la definición de divisibilidad, si a/b y a/c, entonces existen polinomios $q_1,q_2\in R[\lambda]$, tales que*

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= q_1(\lambda)\,a(\lambda) \\ c(\lambda) &= q_2(\lambda)\,a(\lambda) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} b(\lambda)+c(\lambda) &= q_1(\lambda)\,a(\lambda)+q_2(\lambda)\,a(\lambda) \\ &= (q_1(\lambda)+q_2(\lambda))\,a(\lambda) \end{aligned}$$

o sea, $a/(b+c)$.

El resto de la demostración se deja como ejercicio empleando la definición de divisibilidad. ■

DEFINICION 16 *Si $a(\lambda),b(\lambda)\in R[\lambda]$, entonces el polinomio mónico $g(\lambda)\in R[\lambda]$ se denomina el máximo común divisor de $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$, y se denota mediante $g(\lambda)=\gcd(a(\lambda),b(\lambda))$, si*

1. *g/a y g/b (g es un divisor común),*
2. *Si existe un $c\in R[\lambda]$ tal que c/a y c/b, entonces c/g. (Si existe otro común divisor c de a y b, entonces c es un factor de g)*

Es importante observar que si un polinomio $g(\lambda)$ cumple con las condiciones (1) y (2) de la definición de gcd, entonces $kg(\lambda)$ con $k\in F$, también cumple con las mismas condiciones para cada $k\neq 0$. En particular, k puede seleccionarse tal que $g(\lambda)$ sea mónico, y esta última exigencia no es sustancial para la definición del gcd pero si es necesaria para garantizar la unicidad del concepto.

Sean dos polinomios $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$, entonces existen polinomios $q_1(\lambda), r_1(\lambda)$ tales que

$$a(\lambda) = q_1(\lambda)\, b(\lambda) + r_1(\lambda)$$

Si $r_1(\lambda)$

Considere la ecuación

$$a(\lambda)\, x(\lambda) + b(\lambda)\, y(\lambda) = c(\lambda) \tag{4}$$

donde $a, b, c \in R[\lambda]$ son polinomios dados. Esta ecuación se denominarán ecuación Diofantina o Bezout en el conjunto de polinomios $R[\lambda]$ y por su solución se entenderá un par de polinomios $(x, y) \in R[\lambda]$ que satisface la ecuación (4).

El siguiente resultado es de importancia.

TEOREMA 17 *Si $a(\lambda), b(\lambda)$ son polinomios sobre F, no ambos nulos, entonces ellos tienen un máximo común divisor $g(\lambda)$ en $F[\lambda]$. Más aún, $g(\lambda)$ es único y expresable como*

$$g(\lambda) = p_1(\lambda)\, a(\lambda) + p_2(\lambda)\, b(\lambda)$$

donde $p_1(\lambda), p_2(\lambda) \in K[\lambda]$.

DEMOSTRACION. *Dentro el conjunto $F[\lambda]$ considere el subconjunto que consiste en todos los polinomios de la forma*

$$y_1(\lambda)\, a(\lambda) + y_2(\lambda)\, b(\lambda)$$

con $y_1(\lambda), y_2(\lambda) \in F[\lambda]$. Entonces, S contiene $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$ ya que

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 1.a(\lambda) + 0.b(\lambda) \\ b(\lambda) &= 0.a(\lambda) + 1.b(\lambda) \end{aligned}$$

y S contiene al menos un polinomio distinto de cero.

Note también que S es cerrado con respecto a la suma y la resta, en el sentido que

$$\begin{aligned} [y_1(\lambda)\, a(\lambda) + y_2(\lambda)\, b(\lambda)] \pm [x_1(\lambda)\, a(\lambda) + x_2(\lambda)\, b(\lambda)] &= \\ & [y_1(\lambda) \pm x_1(\lambda)]\, a(\lambda) + [y_2(\lambda) \pm x_2(\lambda)]\, b(\lambda \end{aligned}$$

pertenece a S. Ademas. si $z(\lambda) \in S$, entonces $q(\lambda)\, z(\lambda) \in S$, ya que

$$z(\lambda) = y_1(\lambda)\, a(\lambda) + y_2(\lambda)\, b(\lambda)$$

para $y_1, y_2 \in F[\lambda]$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} q(\lambda)\, z(\lambda) &= q(\lambda) \{y_1(\lambda)\, a(\lambda) + y_2(\lambda)\, b(\lambda)\} \\ &= [q(\lambda)\, y_1(\lambda)]\, a(\lambda) + [q(\lambda)\, y_2(\lambda)]\, b(\lambda) \\ &\in S \end{aligned}$$

Entre todos los polinomios diferentes de cero S, sea $g(\lambda)$ un polinomio de grado mas pequeño. Se demostrará que $g(\lambda)$ divide cada $z(\lambda)$ en S. Por el algoritmo de Euclides y la relación (1), para un $z \in F[\lambda,]$ existen polinomios $q, r \in F[\lambda]$ tales que

$$z(\lambda) = q(\lambda)\, g(\lambda) + r(\lambda)$$

con $r = 0$ o $\deg(r) \leq \deg(g)$.

Ya que $d \in S$, entonces $q(\lambda)\, g(\lambda) \in S$, y por la relación anterior $r(\lambda) = z(\lambda) - q(\lambda)\, g(\lambda)$ la cual dice que $r(\lambda) \in S$. Entonces $r(\lambda) = 0$, de lo contrario $r(\lambda)$ sería un elemento de S con grado mas pequeño que el grado de g, lo cual es una contradicción a la selección de g. Por lo tanto, $z(\lambda) = q(\lambda)\, g(\lambda)$ y g divide a cada elemento de S, en particular g/a y g/b. Si existe otro polinomio $g_0 \in F[\lambda]$ tal que $g_0/a, b$. Entonces existen polinomios $h_1, h_2 \in F[\lambda]$ tales que

$$a(\lambda) = h_1(\lambda)\, g_0(\lambda) \quad y \quad b(\lambda) = h_2(\lambda)\, g_0(\lambda)$$

Pero entonces,

$$g(\lambda) = p_1(\lambda)\, a(\lambda) + p_2(\lambda)\, b(\lambda)$$

ya que $g \in S$, y

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= p_1(\lambda)\, h_1(\lambda)\, g_0(\lambda) + p_2(\lambda)\, h_2(\lambda)\, g_0(\lambda) \\ &= [p_1(\lambda)\, h_1(\lambda) + p_2(\lambda)\, h_2(\lambda)]\, g_0(\lambda) \end{aligned}$$

En consecuencia, g_0/g. ■

DEFINICION 18 *Dos polinomios $r(\lambda), p(\lambda) \in R[\lambda]$ se dicen ser **relativamente primos o coprimos** sobre $R[\lambda]$ si no tienen factores o divisores comunes diferente de una constante (necesariamente = 1).*

Los polinomios $a(\lambda) = \lambda$ y $b(\lambda) = \lambda^2 - 1$ de $R[\lambda]$ son relativamente primos o coprimos sobre $R[\lambda]$. Una manera de demostrar esto es observando que

$$1 = \lambda a(\lambda) + (-1)\, b(\lambda)$$

y aplicando el teorema anterior se concluye de inmediato que

$$1 = \gcd\left[\lambda, \lambda^2 - 1\right]$$

TEOREMA 19 *Suponga que tiene dos polinomios*

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= r_0 + r_1\lambda + \cdots + r_n\lambda^n \\ p(\lambda) &= p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_m\lambda^m \end{aligned}$$

de grados $n \geq 1, m \geq 1$, con $r_0 \neq 0$ y $p_0 \neq 0$. Para que $r(\lambda)$ y $p(\lambda)$ tengan raices comunes, es necesario y suficiente que existan dos polinomios no nulos $h(\lambda)$ y $k(\lambda)$

con grados respectivos $\operatorname{grad}(h) \leq m-1$, $\operatorname{grad}(k) \leq n-1$, *tales que se cumpla la identidad*

$$h(\lambda)\, r(\lambda) = k(\lambda)\, p(\lambda)$$

DEMOSTRACION. *En efecto, decir que* $r(\lambda)$ *y* $p(\lambda)$ *tengan raices comunes significa que exista un polinomio* $\psi(\lambda)$ *no nulo con* $\operatorname{grad}(\psi) \geq 1$ *tal que*

$$r(\lambda) = \psi(\lambda)\, r_1(\lambda), \qquad p(\lambda) = \psi(\lambda)\, p_1(\lambda)$$

y entonces basta tomar $h(\lambda) = p_1(\lambda)$ *y* $k(\lambda) = r_1(\lambda)$ *para generar la igualdad planteada. Inversamente, si se cumple la igualdad y si el par* (r, p) *fuera coprimo sobre* $R[\lambda]$, *entonces* $r(\lambda)/k(\lambda)\, p(\lambda)$ *pero como* $r(\lambda) \nmid p(\lambda)$ *por la proposición anterior solo queda la posibilidad que* $r(\lambda)/k(\lambda)$. *sin embargo esto es imposible ya que* $k \neq 0$ *y* $\operatorname{grad}(k) < \operatorname{grad}(r)$. ■

Si escribimos

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_{m=1}\lambda^{m-1} \\ k(\lambda) &= k_0 + k_1\lambda + \cdots + k_{n-1}\lambda^{n-1} \end{aligned}$$

e identificando los dos miembros de **??** :

$$\left(h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_{m=1}\lambda^{m-1}\right)\left(r_0 + r_1\lambda + \cdots + r_n\lambda^n\right) = \\ \left(k_0 + k_1\lambda + \cdots + k_{n-1}\lambda^{n-1}\right)\left(p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_m\lambda^m\right)$$

se obtiene un sistema de $(m+n)$ ecuaciones lineales para los coeficientes h_i y k_j :

$$\begin{aligned} h_0 r_0 &= k_0 p_0 \\ h_0 r_1 + h_1 r_0 &= k_0 p_1 + k_1 p_0 \\ &\cdots \\ h_{m-1} r_{n-1} + h_{m-2} r_n &= k_{n-2} p_m + k_{n-1} p_{m-1} \\ h_{m=1} r_n &= k_{n-1} p_m \end{aligned}$$

y la condición para que $r, p \in R[\lambda]$ tengan por lo menos una raíz común es por lo tanto que el determinante de este sistema de ecuaciones sea nulo. Este determinante se escribe como

$$R(r,p) = \det \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} & r_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_0 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} & r_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} & p_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_0 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

y se llama resultante de Sylvester del par $(r,p) \in R[\lambda]^2$.

Se tienen todas las herramientas para demostrar el siguiente importante y útil resultado.

DEFINICION 20 *La matriz eliminante, M_e, de dos polinomios no-nulos en $R[\lambda]$*

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= r_0 + r_1\lambda + \cdots + r_n\lambda^n \\ p(\lambda) &= p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_n\lambda^n \end{aligned}$$

con $p_n \neq 0$ es una matriz constante de dimensión $(2n \times 2n)$ constituidas por los coeficientes de los polinomios desplazados

$$\begin{aligned} M_e &= \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} & r_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_0 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} & r_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} & p_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_0 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (m_e^1)^{Tr} & (m_e^2)^{Tr} & \cdots & (m_e^{n-1})^{Tr} & (m_e^n)^{Tr} & (m_e^{n+1})^{Tr} & (m_e^{n+2})^{Tr} & \cdots & (m_e^{2n})^{Tr} \end{bmatrix}^{Tr} \end{aligned}$$

donde $m_e^i = i-$ésima fila de M_e.

TEOREMA 21 *(Sylvester) Los polinomios $r(\lambda) = r_0 + r_1\lambda + \cdots + r_n\lambda^n$ y $p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_n\lambda^n$, con $p_n \neq 0$, son relativamente primos o coprimos en $R[\lambda]$ si, y solamente si, su matriz eliminante es no-singular (o sea, su* $\det(M_e) \neq 0$)

DEMOSTRACION. *Estableceremos primero la necesidad por contradicción. En particular, suponga que $r,p \in R[\lambda]$ son coprimos pero que el determinante de su eliminante, M_e, denominado el resultante del par (r,p), es cero, o sea,* $\det(M_e) = 0$. *Esto quiere decir que las columnas de la matriz eliminante son linealmente dependientes sobre R; o sea, existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2n} \in R$, no todas nulas, tales* *que*

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 m_e^1 + \alpha_2 m_e^2 + \cdots + \alpha_n m_e^n + \alpha_{n+1} m_e^{n+1} + \alpha_{n+2} m_e^{n+2} + \cdots + \alpha_{2n} m_e^{2n} &= 0 \\
\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \cdots & \alpha_{2n} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} m_e^1 \\ m_e^2 \\ \vdots \\ m_e^{n-1} \\ m_e^n \\ m_e^{n+1} \\ m_e^{n+2} \\ \vdots \\ m_e^{2n} \end{bmatrix} &= 0 \\
\begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} \end{bmatrix} M_e &= 0
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(1)} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \\
\alpha^{(2)} &= \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \cdots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora defina el vector columna $\Lambda_e(s) \in R^{2n\times 1}[\lambda]$

$$
\Lambda_e(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{2n-1} \end{bmatrix}^{Tr}
$$

y de inmediato se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} \end{bmatrix} M_e \Lambda_e(s) &= \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} r(\lambda) \\ \lambda r(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} r(\lambda) \\ p(\lambda) \\ \lambda p(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} p(\lambda) \end{bmatrix} \\
&= \alpha^{(1)}(\lambda)\, r(\lambda) + \alpha^{(2)}(\lambda)\, p(\lambda) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

para algunos polinomios $\alpha^{(1)}(\lambda), \alpha^{(2)}(\lambda) \in R[\lambda]$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(1)}(\lambda) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-2} + \alpha_n \lambda^{n-1} \\
\alpha^{(2)}(\lambda) &= \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} \lambda + \cdots + \alpha_{2n-1}\lambda^{n-2} + \alpha_{2n} \lambda^{n-1}
\end{aligned}
$$

con al menos uno de los α_i *distinto de cero. Es claro, sin embargo, que ambos polinomios* $\alpha^{(1)}(\lambda)$ *y* $\alpha^{(2)}(\lambda)$ *deben ser no nulos ya que en caso contrario cualquiera* *de los polinomios $r(\lambda)$ o $r(\lambda)$ sería identicamente igual a cero. Y en consecuencia, de acuerdo al resultado anterior los polinomios $r(\lambda)$ y $p(\lambda)$ tendrían factores comunes, lo cual sería una contradicción a la hipótesis inicial.*

Para demostrar suficiencia, note que un resultante de (r,p) diferente de cero, implicaría que el par (r,p) sería coprimo sobre $R[\lambda]$. Defina ahora el vector $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} M_e^{-1}$, lo que a su vez implicaría que

$$\begin{aligned} \alpha M_e \Lambda_e(s) &= \alpha^{(1)}(\lambda) r(\lambda) + \alpha^{(2)}(\lambda) p(\lambda) \\ &= 1 \end{aligned}$$

para algun par $\left(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\right) \in R[\lambda]^2$. Por lo tanto, 1 es un máximo comun divisor de $r(\lambda)$ y $p(\lambda)$; o sea, el par (r,p) sería coprimo sobre $R[\lambda]$. ■

COROLARIO 22 *Si $r(\lambda), p(\lambda) \in R[\lambda]$ son relativamente primos, con $\operatorname{grad}(p) = n$ y $\operatorname{grad}(r) \leq n$, entonces para cualquier polinomio arbitrario de grado $2n-1$, $\delta(\lambda) \in R[\lambda], \delta(\lambda) \in R$, existen polinomios $\alpha^{(1)}(\lambda), \alpha^{(2)}(\lambda) \in R[\lambda]$ tal que*

$$\alpha^{(1)}(\lambda) r(\lambda) + \alpha^{(2)}(\lambda) p(\lambda) = \delta(\lambda)$$

DEMOSTRACION. *Solo observe que*

$$\begin{aligned} \delta(\lambda) &= \delta_0 + \delta_1 \lambda + \cdots + \delta_{2n-2} \lambda^{2n-2} + \delta_{2n-1} \lambda^{2n-1} \\ &= \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_{2n-2} & \delta_{2n-1} \end{bmatrix} \\ &= \Delta \Lambda_e(\lambda) \end{aligned}$$

es el polinomio que se desea implementat. Entonces este puede obtenerse tomando

$$\alpha = \Delta M_e^{-1}$$

y luego se resuelve la ecuación de Bezout

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(\lambda) r(\lambda) + \alpha^{(2)}(\lambda) p(\lambda) &= \delta(\lambda) \\ &= \Delta \Lambda_e(\lambda) \end{aligned}$$

para encontrar los polinomios $\alpha^{(1)}(\lambda), \alpha^{(2)}(\lambda)$ con la condición que los grados de cada uno de ellos no sean mayor que $n-1$. ■

EJERCICIO 23 *Encuentre el máximo común múltiplo de cada uno de los siguientes pares de polinomios y expréselos como*

$$g(\lambda) = p_1(\lambda) a(\lambda) + p_2(\lambda) b(\lambda)$$

donde $g = \gcd(a,b)$

1. $a(\lambda) = \lambda^4 + \lambda - 2, b(\lambda) = \lambda^2 - 1;$
2. $a(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1, b(\lambda) = \lambda^2 + 1;$
3. $a(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 1, b(\lambda) = \lambda^2 + 1;$

1.3 Factorizaciones Unicas de Polinomios

El problema de factorizar un polinomio tanto como sea posible es un problema frecuentemente encontrado en los cursos básicos de sistemas de control aunque no se enfatiza generalmente que la respuesta dependerá de las propiedades algebraicas del cuerpo de números que sirve de base a la familia de polinomios considerados.

TEOREMA 24 *Cada polinomio $a \in F[\lambda]$ puede expresarse como*

$$a(\lambda) = cq_1(\lambda)\, q_2(\lambda) \ldots q_r(\lambda) \tag{5}$$

donde $c \neq 0$ y los polinomios $q_i(\lambda)$ son polinomios mónicos e irreducibles de $F[\lambda]$. Dicha expresión es única mas alla del orden en que aparecen los factores $q_i(\lambda)$. Esta fórmula se conoce como la expreción en factores primos de $a(\lambda)$ sobre F.
DEMOSTRACION. *Ver ([1])* ∎

Varios de los polinomio $q_i(\lambda)$ en (5) pueden coincidir. Si todos estos factores se agrupan para formar una potencia de un facor irreducible, entonces el teorema anterior puede redactarse como: "" Cada polinomio $a(\lambda) \in F[\lambda]$ puede factorizarce unívocamente además del orden de los factores en

$$a(\lambda) = c\prod_{i=1}^{r} q_i^{m_i}(\lambda) \tag{6}$$

donde

- $c \in F - \{0\}$,
- cada $q_i(\lambda)$ es irreducible sobre F y diferentes entre si,
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$, y m_i es la multiplicidad del factor $q_i(\lambda)$.

Si un polinomio no constante $a \in F[\lambda]$ factoriza en factores lineales sobre F :

$$a(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \tag{7}$$

diremos entonces que $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ son las raices de $a(\lambda)$. Y nuevamente se observa que el polinomio en λ sobre R

$$= \left(5\lambda^2 + 10\right)^2$$

no tiene tal factorización sobre R, pero si la tiene sobre el cuerpo de números complejos C. Viendo $a(\lambda) \in C[\lambda]$, se tiene

$$a(\lambda) = 25\left(\lambda + j\sqrt{2}\right)^2 \left(\lambda - j\sqrt{2}\right)^2$$

y las raices de $a(\lambda)$ son

$$\left\{j\sqrt{2}, j\sqrt{2}, -j\sqrt{2}, -j\sqrt{2}\right\}$$

En este caso, $\lambda_1 = j\sqrt{2}, m_1 = 2$, $\lambda_2 = -j\sqrt{2}, m_2 = 2$. Si en (7), precisamente de los n factores r son diferentes, se tienen r raices distintas, y si cada raíz λ_i se repite m_i veces, se dice que λ_i es una raíz de $a(\lambda)$ de multiplicidad m_i.

DEFINICION 25 *El polinomio mónico $l(\lambda) \in R[\lambda]$ se denomima el mínimo común múltiplo de $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$, y se denota por $l(\lambda) = \operatorname{lcm}(a(\lambda), b(\lambda))$, si*

1. *a/l y b/l (l es un múltiplo de a y b).*
2. *Si existe un $k \in R[\lambda]$ tal que a/k y b/k, entonces l/k (Si existe otro común múltiplo de a y b, entonces l es un factor de k).*

Suponga, por ejemplo, que R es el cuerpo de coeficientes de los polinomios considerados y que

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 5\lambda^2(\lambda-1)^3\left(\lambda^2+2\right) \\ b(\lambda) &= 6\lambda^5(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

Entonces $\lambda, \lambda+1, \lambda-1$, y λ^2+2 son polinomios o factores irreducibles sobre R. Podemos escribir

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 5\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)^0 \\ b(\lambda) &= 6\lambda^5(\lambda-1)(\lambda+1)^2\left(\lambda^2+2\right)^0 \end{aligned} \tag{8}$$

Entonces ya que $g(\lambda) = \gcd[a(\lambda), b(\lambda)]$ es un divisor de cada uno de los polinomios $a(\lambda), b(\lambda)$, se tiene por (6) que $g(\lambda)$ es un producto de factores de potencias de :

$$g(\lambda) = \lambda^{\alpha_1}(\lambda+1)^{\alpha_2}(\lambda-1)^{\alpha_3}\left(\lambda^2+2\right)^{\alpha_4}$$

Cada exponente α_i debe ser el mas pequeño de los exponentes correspondientes en (8), esto es: α_1 es el mas pequeño entre 2 y 5, α_2 es el mas pequeño entre 3 y 1, α_3 es el mas peqeuño entre 0 y 2, y finalmente α_4 es elmas pequeño entre 1 y 0. por lo tanto

$$g(s) = \gcd(a, b) = \lambda^2(\lambda-1)$$

Si un exponente α_i fuera empleado para cualquiera de los i, $g(\lambda)$ no dividiría a ambos polinomios $a(\lambda), b(\lambda)$. Si se empleara un exponente α_i mas pequeño, $g(\lambda)$ dividiera a ambos polinomios $a(\lambda), b(\lambda)$ pero no sería el mayor de los divisores.

El mínimo común múltiplo $l(\lambda) = \operatorname{lcm}(a, b)$ se cosntruye de manera similar; sin embargo, se escojen los exponentes mas grandes en cada caso. Y se reproduciría la vieja regla de comunes y no comunes a su mayor exponente que todos sabemos. Por lo tanto,

$$l(\lambda) = \operatorname{lcm}(a, b) = \lambda^5(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2\left(\lambda^2+2\right)$$

EJEMPLO 26 *Considere el siguiene polinomio con coeficientes reales en* z,

$$a(z) = 2 - 0.2z - 2z^2 + 0.3z^3$$

Factorice $a(z)$ *usando Scilab.*

SOLUCION 27 *Según el Teorema anterior, a tiene a lo máximo 3 raices sobre R. En consecuencia, a puede factorizarse sobre C*

$$a(z) = a_0 (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)$$

con $\lambda_i \in R, i = 1, 2, 3,$ *de existir dicha factorización.*

Scilab tiene el comando

bezout — Bezout equation for polynomials or integers
denom — denominator
derivat — rational matrix derivative
diophant — diophantine (Bezout) equation
factors — numeric real factorization
gcd — gcd calculation
horner — polynomial/rational evaluation
hrmt — gcd of polynomials
lcm — least common multiple
numer — numerator
pol2str — polynomial to string conversion
polfact — minimal factors
residu — residue
roots — roots of polynomials
simp_mode — toggle rational simplification
sylm — Sylvester matrix

1.4 Funciones Racionales sobre un cuerpo F

DEFINICION 28 *Una función racional* π *sobre un cuerpo de números dado* F *en la indeterminada* λ, *es un cociente de polinomios en* $F[\lambda]$. *Esto es*

$$\pi(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

con $N, D \in F[\lambda]$. *Por lo tanto*

$$\pi(\lambda) = \frac{b_m \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0}{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0, b, b_{m-1}, \cdots, b_1, b_0 \in F$ *y no todos los coeficientes* $a_i's$ *son cero.*

No nos debemos preocupar por ahora por aquellos valores de λ donde el polinomio denominador $D(\lambda) = 0$. Como polinomio D, el único polinomio que es cero es el polinomio nulo.

Es importante entender que las funciones racionales son similares a los números racionales o fracciones sobre los enteros, debido a que si $P \in F[\lambda]$ es un polinomio no nulo, entonces las funciones racionales

$$\begin{aligned}\pi_1(\lambda) &= \frac{P(\lambda)N(\lambda)}{P(\lambda)D(\lambda)}\\ \pi_2(\lambda) &= \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\end{aligned}$$

representan de hecho la misma función racional y diremos que $\pi_1(\lambda)$ es reducible a $\pi_2(\lambda)$. En consecuencia, si el par $\{N, D\}$ es relativamente primos o coprimos sobre $F[\lambda]$ se dice que la función racional $\pi(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$ es **irreducible**. y es importante notar que para toda $\in F(\lambda)$ existen polinomios $N, D \in F[\lambda]$, mónicos, únicos y coprimos entre si tal que

$$\pi(\lambda) = a\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

para algún $a \in F$.

EJEMPLO 29 *Considere la función racional*

$$H(s) = \frac{2s^2 - 2s - 12}{3s^2 - 15s + 18} \in R(s)$$

Para simplificar o reducir esta función racional mediante Scilab podemos actuar de la siguiente manera:

```
->N=poly([-12 -2 2],"s","coeff");
->D=poly([18 -15 3],"s","coeff");
->H=N/D
 H =
 1.3333333 + 0.6666667s
 ————————————————
 - 2 + s
->[N1,D1]=simp(N,D)
 D1 =
 - 2 + s
 N1 =
1.3333333 + 0.6666667s
->H1=simp(H)
 H1 =
 1.3333333 + 0.6666667s
————————————————
 - 2 + s
```

El conjunto de todas las funciones racionales sobre un cuerpo F en la indeterminada λ se denota por $F\lambda.y$ sobre el cual también pueden definirse las operaciones de suma y multiplicación de funciones racionales $\pi_1(\lambda), \pi_2(\lambda) \in F(\lambda)$. Si

$$\pi_1(\lambda) = \tfrac{N_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \quad \pi_2(\lambda) = \tfrac{N_2(\lambda)}{D_2(\lambda)}$$

entonces:

a) Suma de funciones racionales

$$\begin{aligned} \pi_1(\lambda) + \pi_2(\lambda) &= \frac{N_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{N_2(\lambda)}{D_2(\lambda)} \\ &= \frac{N_1(\lambda) D_2(\lambda) + N_2(\lambda) D_1(\lambda)}{D_1(\lambda) D_2(\lambda)} \end{aligned}$$

b) Multiplicación de funciones racionales

$$\begin{aligned} \pi_1(\lambda) \pi_2(\lambda) &= \frac{N_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} \cdot \frac{N_2(\lambda)}{D_2(\lambda)} \\ &= \frac{N_1(\lambda) N_2(\lambda)}{D_1(\lambda) D_2(\lambda)} \end{aligned}$$

Dichas operaciones fundamentales se pueden realizar muy bien en Scilab tal como se ilustra a continuación.

EJEMPLO 30 *En este caso se consideran funciones racionales reales en el síímbolo o variable s.*

```
-->a=[1 -2 4 5];
-->b=[-2 1-3*%i 1+3*%i -4 1];
-->n1=poly(a,"s","coeff");
-->d1=poly(b,"s","roots");
-->p1=n1/d1
 p1 =
 1 - 2s + 4s^2 + 5s^3
 ————————————————
 - 80 + 36s + 38s^2 + 2s^3 + 3s^4 + s^5
-->s=poly(0,"s")
 s =
 s
-->p2=(1-2*s)/poly([-1 2 1 1],"s","coeff")
 p2 =
 1 - 2s
————————
 - 1 + 2s + s^2 + s^3
```

–>ps=p1+p2
ps =
- 81 + 200s - 41s^2 - 72s^3 + 11s^4 + 4s^5 + 3s^6
———————————————————————
80 - 196s - 46s^2 + 30s^3 + 75s^4 + 45s^5 + 7s^6 + 4s^7 + s^8
–>pm=p1*p2
pm =

1 - 4s + 8s^2 - 3s^3 - 10s^4
———————————————————————
80 - 196s - 46s^2 + 30s^3 + 75s^4 + 45s^5 + 7s^6 + 4s^7 + s^8

DEFINICION 31 *Una función racional* $T(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$, *con* $N, D \in F[\lambda]$ *es: a) propia si*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |T(\lambda)| = |T(\infty)| < \infty$$

b) Una función racional $T(\lambda)$ *estrictamente propia si*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |T(\lambda)| = 0$$

c) La función $T(\lambda)$ *es bipropia si* T *y* T^{-1} *son ambas propias.*

Es sumamente sencillo demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 32 *Dada una función racional* $T(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$, *con* $N, D \in R[\lambda]$ *con*

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \\ D(\lambda) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

y $m = \operatorname{grad}(N), n = \operatorname{grad}(D)$. *Entonces:*

1. *La función* $T(\lambda)$ *es propia si y solamente si* $\operatorname{grad}(N) \leq \operatorname{grad}(D)$,
2. *La función* $T(\lambda)$ *es estrictamente propia si y solamente si* $\operatorname{grad}(N) < \operatorname{grad}(D)$,
3. *La función* $T(\lambda)$ *es bipropia si y solamente si* $\operatorname{grad}(N) = \operatorname{grad}(D)$,

EJEMPLO 33 *a) Las siguientes funciones racionales en* λ *son propias:*

$$\begin{array}{ll} T_1(\lambda) = \frac{\lambda+1}{\lambda^2+3\lambda-4}; & T_2(\lambda) = \frac{\lambda^3+1}{\lambda^4+3\lambda^2-4\lambda-3}; \\ T_3(\lambda) = \frac{\lambda^4+3\lambda^2-4\lambda-3}{(\lambda-2)\left[(\lambda+7)^2+16\right](\lambda+4)} & T_4(\lambda) = \frac{\lambda^3+1}{(\lambda+4)^3} \end{array}$$

b) Las funciones racionales $T_1(\lambda)$ *y* $T_2(\lambda)$ *son estrictamente propias,*
c) $T_3(\lambda), T_4(\lambda)$ *son bipropias*

d) No son propias las siguientes funciones racionales

$$\begin{aligned} T_5(\lambda) &= \frac{\lambda+1}{\lambda^2+3\lambda-4}e^{-3\lambda} \\ T_6(\lambda) &= \frac{\lambda^4+1}{(\lambda+4)^3} \\ T_7(\lambda) &= \frac{\sqrt{\lambda}^3+1}{\lambda^4+3\lambda^2-4\lambda-3} \end{aligned}$$

DEFINICION 34 *Dada una función racional* $T(\lambda) = a\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$, *con* $N, D \in F[\lambda]$ *con*

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \\ D(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

Suponga además que $T(\lambda)$ *es irreducible (el par* (N, D) *es coprimo sobre* $F[\lambda]$*). Un cero de* $T(\lambda)$ *se define como una raíz de* $N(\lambda)$*; mientras que un polo de* $T(\lambda)$ *es una raíz de* $D(\lambda)$*. Si* $(n-m) = \mu \geq 1$*, entonces se dice que* $T(\lambda)$ *tiene* μ *ceros en infinito o* μ *polos en exceso. Si por el contrario,* $(m-n) = \rho \geq 1$*, entonces* $T(\lambda)$ *tiene* ρ *polos en infinito o* r *ceros en exceso;*

EJEMPLO 35 *Considere la función racional*

$$G(\lambda) = \frac{\lambda^2+\lambda-2}{\lambda^2+2\lambda-3}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \lambda^2+\lambda-2 &= (\lambda+2)(\lambda-1) \\ \lambda^2+2\lambda-3 &= (\lambda+3)(\lambda-1) \end{aligned}$$

O sea,

$$G(\lambda) = \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+3)}$$

y G *tiene un cero en* $\lambda = -2$*, un polo en* $\lambda = -3$*, no tiene polos o ceros en infinito ya que* $\mu = \rho = 0$*.*

1.5 Expansión en fracciones Parciales

Un resultado sumamente importante para las funciones racionales es su expansión en fracciones parciales. O sea, se quiere expandir una función racional dada como la suma de fracciones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios irreducibles.

Por ejemplo, si

$$H(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{(\lambda+1)^2(\lambda-2)} = -\frac{1}{9}\frac{1}{\lambda+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{\lambda-2}$$

Esta forma de expresar las funciones racionales son de uso frecuente en el cálculo de las inversas de la transformadas de Fourier, Laplace y Z.

Dada una función racional

$$T(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \tag{9}$$

con $N, D \in F[\lambda]$ con

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \\ D(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

con el par (N, D) es coprimo sobre $F[\lambda]$ ($T(\lambda)$ irreducible).

En el proceso de expandir una función racional $T(\lambda)$ en fracciones parciales, hay dos grandes pasos. el primer paso es reducir la expansión a la de una función racional estrictamente propia. Esto sucede cuando, la función racional (9) tiene polos en infinito. Esto es, cuando

$$\rho = \mathrm{grad}(N) - \mathrm{grad}(D) = m - n \geq 1$$

De ser este el caso, exprese el polinomio numerador $N(\lambda)$ via división extendida o el algoritmo de Euclides como

$$N(\lambda) = Q(\lambda) + R(\lambda)$$

con $\deg[R(\lambda)] < \deg[D(\lambda)]$, y exprese $T(\lambda)$ como

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= aQ(\lambda) + a\frac{R(\lambda)}{D(\lambda)} \\ &= aQ(\lambda) + T_1(\lambda) \end{aligned}$$

donde $T_1(\lambda) = a\frac{R(\lambda)}{D(\lambda)}$ es irreducible.

EJEMPLO 36 *Considere la siguiente función racional real en la indeterminada* λ,

$$T(\lambda) = a\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^4 + 2z^3 + z + 2}{z^2 + 1}$$

En este caso: $a = 1$, $N(z) = z^4 + 2z^3 + z + 2$, *y* $D(z) = z^2 + 1$. *La función racional* $T(z)$ *no es estrictamente propia y de hecho tiene* $\rho = 4 - 2 = 2$ *polos en infinito.*

Se desea expresar $T(z)$ *como* $aQ(z) + a\frac{R(z)}{D(z)}$. *Para eso podemos usar Scilab como se ilustra a continuación.*

->//Defina o construya los polinomios denominador y numerador
–>N=poly([2 1 0 2 1],"z","coeff");
–>D=poly([1 0 1],"z","coeff");
–>[R,Q]=pdiv(N,D)
Q =
$-1+2z+z^2$
R =
$\mathbf{3-z}$
Por lo tanto,

$$T(z) = -1+2z+z^2+\frac{3-z}{z^2+1}$$

y $a=1$, $Q(z) = -1+2z+z^2$, *y* $T_1(z) = \frac{3-z}{z^2+1}$ *estrictamente propia y es sobre esta última sobre la cual se expandiría en fracciones parciales.*

El próximo paso es la expansión actual en fracciones parciales, la cual se aplicará a la función racional estrictamente propia $T_1(\lambda) = a\frac{R(\lambda)}{D(\lambda)}$. Para llevar a cabo o realizar el segundo paso, es necesario considerar cuatro casos que dependen de ciertas características del denominador $D(\lambda)$. Estudiaremos cada uno de los casos separadamente.

- Caso 1: $D(\lambda)$ tiene solamente raices reales y diferentes (distintos factores lineales reales).
- Caso 2: $D(\lambda)$ tiene solamente raices reales y algunas repitidas (factores lineales reales y algunos repitidos).
- Caso 3: $D(\lambda)$ tiene solamente raices diferentes y un par complejo conjugado (un factor cuadrático simple).
- Caso 4: $D(\lambda)$ tiene un par de raices conplejas conjugadas (un factor cuadrático repetido)

1.5.1 Caso 1: $D(\lambda)$ tiene solamente raices reales y diferentes (distintos factores lineales reales).

Dada una función racional irreducible

$$T(\lambda) = a\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

donde

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda - p_i) \end{aligned}$$

donde para cada $i, j \in \{i, 2, \cdots, n\}$, $p_i, p_j \in R$ (polos de de $T(\lambda)$) son distintos.

Por lo tanto, $T(\lambda)$ tiene una expansión en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= a\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{aN(\lambda)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda - p_i)} \\ &= a\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)} \end{aligned} \tag{10}$$

Para evaluar un coeficiente típico K_k, o **residuo** de $T(\lambda)$ en el polo p_k, multiplique ambos lados de (10) por el factor $(\lambda - p_k)$. El resultado es

$$(\lambda - p_k)\frac{T(\lambda)}{a} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n}(\lambda - p_k)\frac{K_i}{(\lambda - p_i)} + K_k$$

y evaluando ambos lados en cada $\lambda = p_k$ se tiene

$$\begin{aligned} K_k &= \left.(\lambda - p_k)\frac{T(\lambda)}{a}\right|_{\lambda = p_k} \\ &= \left.(\lambda - p_k)\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda = p_k} \end{aligned}$$

para $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

EJEMPLO 37 *Expanda en fracciones parciales la función racional*

$$G(\lambda) = \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 3)}$$

Debido a que los polos del sistemas son $\{0, -1, -2\}$, $a = 1$, *y* $G(\lambda)$ *es estrictamente propia, se tiene entonces que*

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 3)} \\ &= \frac{K_1}{\lambda} + \frac{K_2}{(\lambda + 1)} + \frac{K_3}{(\lambda + 3)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= [\lambda G(\lambda)]_{\lambda=0} = \left[\frac{\lambda + 2}{(\lambda + 1)(\lambda + 3)}\right]_{\lambda=0} = \frac{2}{3} \\ K_2 &= [(\lambda + 1)G(\lambda)]_{\lambda=-1} = \left[\frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 3)}\right]_{\lambda=-1} = -\frac{1}{2} \\ K_1 &= [\lambda G(\lambda)]_{\lambda=0} = \left[\frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)}\right]_{\lambda=-3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)} \\ &= \frac{2}{3\lambda} - \frac{1}{2(\lambda+1)} - \frac{1}{6(\lambda+3)} \end{aligned}$$

Una manera alternativa de calcular los coeficientes $K_k's$ se deduce al observar que el polinomio denominador $D(\lambda)$ puede escribirse como

$$D(\lambda) = (\lambda - p_k) D_1(\lambda)$$

y diferenciando ambos lados de dicha relación se genera

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{d}{d\lambda}(\lambda - p_k) D_1(\lambda)\right]_{\lambda=p_k} \\ &= \left[(\lambda - p_k)\frac{d}{d\lambda} D_1(\lambda)\right]_{\lambda=p_k} + [D_1(\lambda)]_{\lambda=p_k} \\ &= [D_1(\lambda)]_{\lambda=p_k} \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$= [D_1(\lambda)]_{\lambda=p_k} = \left[\frac{D(\lambda)}{(\lambda - p_k)}\right]_{\lambda=p_k}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_k &= (\lambda - p_k)\left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda=p_k} = \left.\frac{N(\lambda)}{\left[\frac{D(\lambda)}{(\lambda-p_k)}\right]}\right|_{\lambda=p_k} \\ &= \left.\frac{N(\lambda)}{\left[\frac{d}{d\lambda}D(\lambda)\right]_{\lambda=p_k}}\right|_{\lambda=p_k} = \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} \end{aligned}$$

En resumen, la expansión en fracciones parciales correspondiente será

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= a\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(\lambda - p_i)} \\ &= a\sum_{i=1}^{n} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{(\lambda - p_i)} \end{aligned}$$

1.5.2 Caso 2: $D(\lambda)$ tiene solamente raices reales y algunas repitidas (factores lineales reales y algunos repitidos)

Con el objeto de ilustrar el metódo, suponga sin perdida de generalidad que en este caso, la función racional es de la forma

$$T(\lambda) = a\frac{N(\lambda)}{(\lambda - p_1)^r (\lambda - p_2)\cdots(\lambda - p_{n-r})}$$

donde suponemos que $n = \deg[D(\lambda)]$, y r es la multiplicidad del polo p_1. En consecuencia,

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= a\frac{N(\lambda)}{(\lambda - p_1)^r (\lambda - p_2)\cdots(\lambda - p_{n-r})} \\ &= a\left[\sum_{j=1}^{r}\frac{K_{1j}}{(\lambda - p_1)^j} + \sum_{i=2}^{n-r}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)}\right] \end{aligned}$$

Los coeficientes $K_i, i \in \{2, 3, \cdots (n-r)\}$, los residuos de $T(\lambda)$ en el polo p_i, se evaluan de la misma manera que en el caso 1. De igual manera se calcula K_{1r} (el coeficiente del sumando $\frac{1}{(\lambda-p_1)^r}$) el cual es el residuo de la función racional $T(\lambda)$ en el polo p_1, esto es,

$$K_{1r} == (\lambda - p_1)^r \left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda=p_1}$$

Para generar la fórmula para el cálculo del resto de los coeficente relacionados con el polo que se repite p_1, note que

$$\begin{aligned} (\lambda - p_1)^r\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} &= (\lambda - p_1)^r\sum_{j=1}^{r}\frac{K_{1j}}{(\lambda - p_1)^j} + (\lambda - p_1)^r\sum_{i=2}^{n-r}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)} \\ &= K_{11} + \cdots + K_{1,r-1}(\lambda - p_1) + K_{1r} + (\lambda - p_1)^r\sum_{i=2}^{n-r}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)} \end{aligned}$$

Si derivamos ambos lado de la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\lambda - p_1)^r\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} &= (r-1)(\lambda - p_1)^{r-2} + \ldots + 2(\lambda - p_1)K_{1,r-2} + K_{1,r-1} \\ &\quad + (\lambda - p_1)^{r-1}\sum_{i=2}^{n-r}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)} - (\lambda - p_1)^r\sum_{i=2}^{n-r}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)^2} \end{aligned}$$

Y evaluando ambos lados en $\lambda = p_1$, se obtiene

$$K_{1,(r-1)} = \frac{d}{d\lambda}(\lambda - p_1)^r\left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda=p_1}$$

y generalizando

$$K_{1,(r-j)} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\lambda^j}\left(\lambda - p_1\right)^r \left.\frac{N\left(\lambda\right)}{D\left(\lambda\right)}\right|_{\lambda=p_1}$$

para $j \in \{1, 2, \cdots, r\}$

EJEMPLO 38 *Expanda en fracciones parciales la función racional*

$$H\left(s\right) = \frac{1}{\left(s+2\right)^3\left(s+3\right)}$$

La función racional dada cumple con la condiciones exigidas para aplicar la metodología para expandir en fracciones parciales correspondiente al caso 2. Por lo tanto

$$H\left(s\right) = \frac{K_{11}}{\left(s+2\right)} + \frac{K_{12}}{\left(s+2\right)^2} + \frac{K_{13}}{\left(s+2\right)^3} + \frac{K_2}{\left(s+3\right)}$$

y en consecuencia

$$\begin{array}{ll} K_2 = \left.\left(s+3\right)H\left(s\right)\right|_{s=-3} = -1, & K_{13} = \left.\left(s+2\right)^3 H\left(s\right)\right|_{s=-2} = 1 \\ K_{12} = \frac{d}{ds}\left.\left(s+2\right)^3 H\left(s\right)\right|_{s=-2} = -1 & K_{11} = \frac{d^2}{ds^2}\left.\left(s+2\right)^3 H\left(s\right)\right|_{s=-2} = 1 \end{array}$$

Obteniéndose finalmente

$$\frac{1}{\left(s+2\right)^3\left(s+3\right)} = \frac{1}{\left(s+2\right)} - \frac{1}{\left(s+2\right)^2} + \frac{1}{\left(s+2\right)^3} - \frac{1}{\left(s+3\right)}$$

1.5.3 Caso 3: $D\left(\lambda\right)$ tiene solamente raices diferentes y un par complejo conjugado (un factor cuadrático simple).

Este caso es aquel en donde la función racional $T\left(\lambda\right)$ es de la forma

$$T\left(\lambda\right) = a\frac{N\left(\lambda\right)}{D\left(\lambda\right)}$$

con el par $\{N, D\}$ coprimos y ambos mónicos, y el polinomio denominador $D\left(\lambda\right)$ de grado n tiene dos ceros complejos conjugados y $(n-2)$ raices reales y distintas entre si; o sea,

$$D\left(\lambda\right) = \left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)\prod_{i=3}^{n}\left(\lambda - p_i\right)$$

Por lo tanto,

$$T\left(\lambda\right) = a\frac{N\left(\lambda\right)}{\left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)\prod_{i=3}^{n}\left(\lambda - p_i\right)}$$

Antes de proceder es necesario entender que

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

tiene dos raices

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{aligned}$$

En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de $T(\lambda)$ será

$$T(\lambda) = a\left\{\frac{K_1}{\lambda + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{K_2}{\lambda + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \sum_{i=3}^{n}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)}\right\}$$

Cada uno de los coeficientes $K_2, K_3, \cdots, K_n$ es real; mientras que el par $\{K_1, K_2\}$ son complejos. Sin embargo, todos pueden calcularse mediante la fórmula

$$K_k = (\lambda - p_k)\left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda = p_k}$$

para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ahora bien, concentrémonos en los coeficientes K_1, K_2.

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\lambda + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ K_2 &= \left(\lambda + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_1 &= \left.\frac{N(\lambda)}{\left(\lambda + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\prod_{i=3}^{n}(\lambda - p_i)}\right|_{\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= \frac{1}{2j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left.\frac{N(\lambda)}{\prod_{i=3}^{n}(\lambda - p_i)}\right|_{\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= \frac{1}{2j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{N\left(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\prod_{i=3}^{n}\left(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} - p_i\right)} \end{aligned}$$

mientras que

$$K_2 = \frac{1}{-2j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{N\left(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\prod_{i=3}^{n}\left(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} - p_i\right)}$$

y en consecuencia

$$K_1 = K_2^*$$

o sea, una es el complejo conjugado de la otra. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned}
T(\lambda) &= a\left\{\frac{K_1}{\lambda+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{K_1^*}{\lambda+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \sum_{i=3}^{n}\frac{K_i}{(\lambda-p_i)}\right\} \\
&= a\left\{\frac{K_1}{\lambda+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{K_1^*}{\lambda+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \sum_{i=3}^{n}\frac{K_i}{(\lambda-p_i)}\right\} \\
&= a\left\{\frac{K_1\left(\lambda+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + K_1^*\left(\lambda+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\left(\lambda^2+2\zeta\omega_n\lambda+\omega_n^2\right)} + \sum_{i=3}^{n}\frac{K_i}{(\lambda-p_i)}\right\} \\
&= a\left\{\frac{2\operatorname{Re}\left[K_1\left(\lambda+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]}{\left(\lambda^2+2\zeta\omega_n\lambda+\omega_n^2\right)} + \sum_{i=3}^{n}\frac{K_i}{(\lambda-p_i)}\right\}
\end{aligned}$$

Finalmente, note que

$$2\operatorname{Re}\left[K_1\left(\lambda+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right] = A\lambda + B$$

o sea,

$$\begin{aligned}
A &= 2\operatorname{Re}(K_1) \\
B &= 2\operatorname{Re}(K_1)(\zeta\omega_n) + 2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\operatorname{Im}(K_1)
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$T(\lambda) = a\left\{\frac{A\lambda+B}{\left(\lambda^2+2\zeta\omega_n\lambda+\omega_n^2\right)} + \sum_{i=3}^{n}\frac{K_i}{(\lambda-p_i)}\right\}$$

La tarea no parece sencilla, sin embargo, la relación anterior motiva tal vez una forma mas sencilla para calcular A, B tal como se ilustra a continnuación.

EJEMPLO 39 *Considere la siguiente función racional*

$$T(s) = \frac{s^2-2s+1}{s^3+3s^2+4s+2}$$

pero

$$\begin{aligned} D(s) &= s^3+3s^2+4s+2 \\ &= \left(s^2+2s+2\right)(s+1) \\ &= \left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)(s+1) \end{aligned}$$

y

$$T(s)=\frac{s^2-2s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)}=\frac{As+B}{(s^2+2s+2)}+\frac{K_3}{(s+1)}$$

O sea, $\omega_n=\sqrt{2}$ *y* $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, *por lo tanto*

$$\begin{aligned} K_1 &= \left.\frac{1}{-2j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\,\frac{N(s)}{\prod_{i=3}^{n}(s-p_i)}\right|_{s=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= \left.-\frac{1}{2j}\,\frac{s^2-2s+1}{s+1}\right|_{s=-1-j} \\ &= -1.5-2.0j \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} A &= 2\,\mathrm{Re}(K_1)=-3 \\ B &= 2\,\mathrm{Re}(K_1)(\zeta\omega_n)+2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\mathrm{Im}(K_1) \\ &= 2(-1.5)+2\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}(-2)=-7 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K_3 &= \left.(s+1)\,\frac{s^2-2s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)}\right|_{s=-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

En resumen

$$T(s)=\frac{s^2-2s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)}=\frac{-3s-7}{(s^2+2s+2)}+\frac{4}{(s+1)}$$

Otra manera es mediante la técnica de coeficientes indeterminados

$$\frac{s^2-2s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)}=\frac{As+B}{(s^2+2s+2)}+\frac{K_3}{(s+1)}$$

y se sustituye $K_3 = 4$ *para obtener*

$$\begin{aligned} \frac{s^2-2s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)} &= \frac{As+B}{(s^2+2s+2)} + \frac{4}{(s+1)} \\ &= \frac{(As+B)(s+1)+4(s^2+2s+2)}{(s^2+2s+2)(s+1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s^2-2s+1 &= (As+B)(s+1)+4\left(s^2+2s+2\right) \\ &= (A+4)s^2+(A+B+8)s+(B+8) \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} A+4 &= 1 \\ A+B+8 &= -2 \\ B+8 &= 1 \end{aligned}$$

O sea, $A=-3, B=-7,$ *para obtener*

$$T(s) = \frac{s^2-2s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)} = \frac{-3s-7}{(s^2+2s+2)} + \frac{4}{(s+1)}$$

Este ultimo método puede resultar sencillo cuando los cálculos se hacen manualmente.

Mediante Scilab hay que usar el comando ***pfss(H)*** *donde* H *es una función racional dada para expresar a esta en fracciones parciales. esto se ilustra a continuación.*

->s=poly(0,"s");

// Construya los polinomios Numerador y Denominador

–>n=s^2-2*s+1;

–>d=s^3+3*s^2+4*s+2;

// Se construye la función racional

–>h=n/d;

//Se procede a usar el comando pfss para expandir en fracciones parciales

–>pfss(h)

ans =

ans(1)

$\frac{4}{1+s}$

ans(2)

$\frac{-7-3s}{2+2s+s^2}$

1.5.4 Caso 4: $D(\lambda)$ tiene un par de raices complejas conjugadas (un factor cuadrático repetido)

Este tal vez es el caso menos frecuente de los vistos. Rara vez surge una función racional que posea un par de polos complejos conjugados de multiplicidad r. La función racional $T(\lambda)$ sería de la forma

$$T(\lambda) = a\frac{N(\lambda)}{\left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)^r \prod\limits_{i=2r+1}^{n}(\lambda - p_i)}$$

y aqui el polinomio denominador

$$D(\lambda) = \left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)^r \prod_{i=2r+1}^{n}(\lambda - p_i)$$

es mónico y de grado n.

La correspondiente expansión en fracciones parciales será

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= a\frac{N(\lambda)}{\left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)^r \prod\limits_{i=2r}^{n}(\lambda - p_i)} \\ &= a\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{A_j\lambda + B_j}{\left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)^j} + \sum_{i=2r+1}^{n}\frac{K_i}{(\lambda - p_i)}\right\}\end{aligned}$$

y se recomienda que las constantes o residuos K_i se calculen mediante

$$K_i = (\lambda - p_i)\left.\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}\right|_{\lambda = p_i}$$

para $i \in \{2r + 1.2r + 2, \cdots, n\}$, mientras que el resto de las constantes $\{A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_r, B_r\}$ pueden calcularse mediante la técnica de coeficientes indeterminados.

EJEMPLO 40 *Considere la función racional*

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s^2 + 2s + 2)^3 (s + 1)}$$

1.6 Evaluación de Polinomios y Funciones Racionales

Si se tiene un polinomio $a(\lambda) \in R[\lambda]$

$$a(\lambda) = a(1) + a(2)\lambda + a(3)\lambda^2 + ... + a(n)\lambda^{n-1}$$

o una función racional $T(\lambda) \in R(\lambda)$ dada por

$$T(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

con $N, D \in F[\lambda]$. Entonces para evaluar cualquiera de estas funciones en un valor escalar particular $\alpha \in C$ mediante Scilab se puede usar el siguiente comando

$$\mathbf{horner}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$$

donde: a) p representa un polinomio en $F[\lambda]$,o una función racional en $F(\lambda)$ y b) x puede ser un arreglo de números o polinomio o función racional. Este comando de Scilab evalúa el polinomio o función racional $p = p(\lambda)$ cuando la variable o símbolo λ se sustituye por x (arreglo numérico, polinomio o función racional, o matriz).

Para aclarar un poco lo que significa evaluar una función, digamos un polinomio $a(\lambda)$, en una matriz A cuadrada de dimensión $q \times q$, debemos tenr en mente que

$$a(\lambda)|_{\lambda=A} = a(1)\, I_q + a(2)\, A + a(3)\, A^2 + ... + a(n)\, A^{n-1}$$

donde Iq representa la matriz identidad de dimensión $(q \times q)$.

EJEMPLO 41 *Suponga que se tiene el polinomio*

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + 3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 \\ h &= p1/(\lambda - 4)^4 \end{aligned}$$

Entonces es posble evaluar dichas expresiones en varios valores de λ simultaneamente mediante el uso de Scilab con el comando **horner(p, x)**. *Suponga que se desea evaluar dichas expresiones en a) $\lambda = 5$, b) $[1\ 2\ 3]$, y finalmente c) $\lambda = \begin{bmatrix} 1/\lambda & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.*

```
–>//Definición del polinomio y función racional a evaluar
–>v=[1 3 4 -1];
–>p1=poly(v,"s","coeff");
–>s=poly(0,"s");
–>h=p1/(s-4)^4;
–>//Evaluación en una constante
–>p15=horner(p1,5)
 p15 =
- 9.
–>//Evaluación en una cadena de números
–>hcad=horner(h,[1 2 3])
 hcad =
 0.0864198   0.9375   19.
–>//Evaluación en una matriz
–>a1=horner(p1,[1/s 0;-1 1])
 a1 =
```

$$\begin{matrix} \frac{-1+4s+3s^2+s^3}{s^3} & \frac{1}{1} \\ \frac{3}{1} & \frac{7}{1} \end{matrix}$$

References

[1] Perlis, Sam. "Theory of Matrices". Dover Books. N.Y. USA. 1952.

[2] Eves, Howard. "Elementary Matrix Theory".Dover Books. N.Y. USA. 1966.

[3] Uspensky, J.V. "Theory of Equaions". McGraw-Hill, N.Y. USA.1948.

[4] Wolovich, W.A. "Linear Multivariable Systems". Springer-Verlag. N.Y. USA. 1977.